



ค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟสำหรับข้อมูลปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์

Average run length using a Markov chain approach for zero truncated Poisson observations

สลิลภา ลีลาอุดมวรกุล¹ ยูปาภรณ์ อารีพงษ์^{2*} และ เสาวณิต สุขภารังษี³

ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ กรุงเทพมหานคร 10800

Salinda Leelaudomworakul¹, Yupaporn Areepong^{2*} and Saowanit Sukparungsee³

Department of Applied Statistics, Faculty of Applied Science,

King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok 10800

Received: 15 August 2018/ Revised: 7 December 2018/ Accepted: 15 December 2018

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Approach: MCA) ของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average control chart: EWMA) เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์ (Zero Truncated Poisson distribution: ZTP) และเปรียบเทียบผลลัพธ์กับวิธีการจำลองข้อมูลโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation: MC) นอกจากนี้ในงานวิจัยได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงในค่าเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (EWMA) และแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum control chart: CUSUM) ซึ่งเกณฑ์ที่ใช้ในการวัดประสิทธิภาพ คือค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length: ARL) และเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU times) จากผลการวิจัยพบว่า ค่าความยาวรันเฉลี่ยจากวิธีลูกโซ่มาร์คอฟมีค่าใกล้เคียงกับวิธีการจำลองข้อมูลโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โลในแผนภูมิควบคุม EWMA แต่ใช้เวลาในการประมวลผลรวดเร็วกว่า และเมื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยกับแผนภูมิควบคุม CUSUM พบว่า แผนภูมิควบคุม CUSUM มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง

คำสำคัญ: ค่าความยาวรันเฉลี่ย วิธีลูกโซ่มาร์คอฟ การแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์ แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง



Abstract

This objective of the research is to approximate Average Run Length (ARL) using a Markov Chain Approach (MCA) of Exponentially Weighted Moving Average control chart (EWMA) when observations are Zero Truncated Poisson Distribution. The results are compared between MCA method and Monte Carlo Simulation (MC). In addition, the performance between EWMA control chart and CUSUM control chart for monitoring process mean is compared by using ARL and CPU Times criteria. The results show that an approximation Average Run Length (ARL) using a Markov Chain Approach (MCA) is as good as Monte Carlo Simulation (MC) but MCA take the computational time much less than MC. Additionally, we also found that CUSUM control chart is more appropriate than EWMA control chart for all magnitude of shifts.

Keywords: Average Run Length (ARL), Markov Chain Approach (MCA), Zero Truncated Poisson distribution (ZTP); Exponentially Weighted Moving Average control chart (EWMA)

บทนำ

ในปัจจุบันตลาดการค้ามีการแข่งขันกันสูงมาก คุณภาพของผลิตภัณฑ์ถือเป็นปัจจัยหนึ่งที่มีผลต่อการตัดสินใจเลือกซื้อผลิตภัณฑ์ ดังนั้นเพื่อให้ได้ผลิตภัณฑ์ที่มีคุณภาพตรงตามมาตรฐานและตรงตามความต้องการของผู้บริโภคจึงต้องอาศัยกระบวนการควบคุมการผลิต แต่ความผันแปรของกระบวนการสามารถเกิดขึ้นได้ตลอดเวลา ซึ่งหากความผันแปรที่เกิดขึ้นนั้นมีปริมาณมากอาจส่งผลกระทบต่อคุณภาพของผลิตภัณฑ์โดยตรง ดังนั้นเพื่อเป็นการควบคุมกระบวนการผลิตให้เป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด และเกิดความผันแปรของกระบวนการผลิตลดลง จึงมีการนำวิธีการทางสถิติมาใช้ในการควบคุมคุณภาพของกระบวนการผลิต หรือที่เรียกว่าการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ (Statistical Process Control: SPC) แผนภูมิควบคุม (control chart) เป็นหนึ่งในเครื่องมือที่สำคัญของ SPC ที่ใช้ในการควบคุมคุณภาพการผลิตที่มีหน้าที่หลักคือ ตรวจสอบและควบคุมความผันแปรของกระบวนการผลิตโดยจะส่งสัญญาณเชิงตัวเลขเตือนเมื่อกระบวนการผลิตมีความผิดปกติเกิดขึ้น เพื่อหยุดและปรับแก้ไขกระบวนการผลิตได้อย่างทันที่

แผนภูมิควบคุมสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิดตามลักษณะของข้อมูลที่ใช้ คือแผนภูมิควบคุมเชิงผันแปร (variable control charts) สำหรับข้อมูลที่วัดค่าได้ เช่น

อุณหภูมิ และน้ำหนัก เป็นต้น และอีกชนิดหนึ่งคือ แผนภูมิควบคุมเชิงคุณลักษณะ (attribute control charts) สำหรับข้อมูลที่วัดค่าไม่ได้หรือวัดค่าได้ยาก เช่น ความสวยงาม และรอยตำหนิ เป็นต้น จะถูกนำมาใช้ในการควบคุมคุณภาพผลิตภัณฑ์ Montgomery [1] พบว่าแผนภูมิควบคุมที่นิยมใช้ ได้แก่ แผนภูมิควบคุมของจำนวนของเสีย (np chart) แผนภูมิควบคุมสัดส่วนของเสีย (p chart) แผนภูมิควบคุมจำนวนรอยตำหนิ (c chart) เนื่องจากแผนภูมิควบคุมรอยตำหนิจะใช้ข้อมูล ณ คาบเวลาปัจจุบันมาทำการตรวจสอบคุณภาพ จึงเกิดแผนภูมิอีกประเภทที่ให้ความสำคัญกับข้อมูลในอดีตและปัจจุบันมาทำการตรวจสอบคุณภาพ ได้แก่ แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum control chart: CUSUM) แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average control chart: EWMA) และแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average control chart: MA) ซึ่งพบว่าสามารถตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการผลิตได้ดี เมื่อกระบวนการผลิตมีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยและแผนภูมิดังกล่าวสามารถใช้ได้ทั้งข้อมูลเชิงปริมาณและข้อมูลเชิงคุณภาพ [2, 3]

โดยทั่วไปเกณฑ์การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมที่นิยมใช้กัน คือค่าความยาวรันเฉลี่ย

(Average Run Length: ARL) โดยค่าความยาวรันเฉลี่ยแบ่งออกเป็น 2 สถานะ คือพิจารณาจากค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (Average Run Length in control process: ARL_0) และค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (Average Run Length out of control process: ARL_1) ซึ่งโดยทั่วไปวิธีการหาค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) มีได้หลายวิธี เช่น วิธีการจำลองโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo simulation: MC) เป็นวิธีหาค่าความยาวรันเฉลี่ยจากการจำลองข้อมูลภายใต้สถานการณ์ที่กำหนด วิธีนี้ง่ายและสะดวกในการคำนวณ ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีนี้ใช้เป็นค่าตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณค่า ARL จากวิธีอื่น ๆ แต่มีข้อจำกัด คือวิธีนี้จะใช้เวลาในการประมวลผลมาก วิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Approach: MCA) เป็นวิธีที่ให้ผลลัพธ์ถูกต้องแม่นยำ ใช้การหาเมทริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสถานะ (transition probability matrix) ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีนี้เป็นค่าประมาณแต่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีการจำลอง เป็นต้น ในปี ค.ศ. 1990 Lucas และ Saccucci [4] ได้นำวิธี MCA ไปคำนวณหาค่า ARL สำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อค่าสังเกตมีการแจกแจงปกติซึ่งพบว่าค่าประมาณของ ARL วิธี MCA ให้ผลใกล้เคียงกับวิธีการ MC วิธีการนี้สามารถใช้ได้กับกระบวนการที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่อง

ในทางปฏิบัติค่าคุณลักษณะเฉพาะที่สนใจอาจมีการแจกแจงไม่เป็นปกติ (non-normal distribution) เช่น ต้องการวัดคุณภาพของการผลิตจากจำนวนรอยตำหนิ การแจกแจงที่เหมาะสม คือการแจกแจงปัวซอง (Poisson distribution) ลักษณะดังกล่าวเหมาะกับตัวแบบการนับ (counting process) โดยสนใจจำนวนครั้งของการเกิดความสำเร็จ (success) ในช่วงเวลาหนึ่ง แต่หากสนใจจำนวนเหตุการณ์ที่ไม่เกิดศูนย์ จำเป็นต้องเลือกใช้การแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์ (Zero Truncated Poisson distribution: ZTP) ตัวอย่างข้อมูล [5] เช่น จำนวนวันนอนโรงพยาบาลของผู้ป่วยโรคต่าง ๆ จำนวนรอบการทำงานของเครื่องจักรกล จำนวนผู้ป่วยที่เข้ามารักษาการติดยา

เสพติด จำนวนสินค้าในตะกร้าของลูกค้าในซูเปอร์มาเก็ต ที่ต่อแถวชำระเงิน และจำนวนภาษาที่มนุษย์พูดได้ เป็นต้น ทั้งนี้ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำการแจกแจงแบบ ZTP มาประยุกต์ใช้กับงานวิจัยนี้

ในปี ค.ศ. 2005 อภิวัฒน์ [6] ได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมคุณภาพสำหรับการตรวจวัดการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการ แผนภูมิที่นำมาเปรียบเทียบ คือแผนภูมิควบคุม CUSUM แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย และแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมที่ตอบสนองอย่างรวดเร็ว (FIR-Combined \bar{x} and CUSUM control chart) แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ปรับน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (FIR-EWMA control chart) และแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ปรับน้ำหนักแบบทั่วไป (GEWMA control chart) โดยเปรียบเทียบจากค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ภายใต้ตัวแบบอนุกรมเวลาคงที่ในค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน โดยศึกษาภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ พบว่า ถ้าขนาดตัวอย่าง 1-12 แผนภูมิควบคุม FIR-EWMA มีประสิทธิภาพมากที่สุด และเมื่อขนาดตัวอย่าง 13-30 แผนภูมิทั้ง 4 แบบ มีประสิทธิภาพเท่ากัน

ในปี ค.ศ. 2015 ภทรพิชชา [7] ได้ศึกษาสูตรสำเร็จของค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) ของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สำหรับจำนวนรอยตำหนิ (Moving Average control chart: MA) และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม MA แผนภูมิควบคุมจำนวนรอยตำหนิ (C-chart) และแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อค่าสังเกตมีการแจกแจงแบบปัวซอง (Poisson distribution) โดยวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิด้วยค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (ARL) พบว่าเมื่อแผนภูมิควบคุม EWMA มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุมจำนวนรอยตำหนิและแผนภูมิควบคุม MA เมื่อระดับการเปลี่ยนแปลงมีขนาดเล็ก และแผนภูมิควบคุม MA มีประสิทธิภาพดีกว่าแผนภูมิควบคุมจำนวนรอยตำหนิและแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อระดับการเปลี่ยนแปลงมีขนาดปานกลางและใหญ่

ในปี ค.ศ. 2017 อภิญา [8] ได้เสนอวิธีการประมาณค่า ARL ของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA Sign



แบบไม่ใช้พารามิเตอร์โดยวิธี MCA และเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลกับวิธี MC พบว่าค่า ARL ที่ได้จากวิธี MCA และ MC มีค่าประมาณใกล้เคียงกัน แต่วิธี MCA ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่า

จากที่กล่าวมาข้างต้นพบว่าวิธี MCA เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพในการประมาณค่า ARL แต่ยังไม่มีการวิจัยเกี่ยวกับข้อมูลที่มีการแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์ ซึ่งการแจกแจงดังกล่าวเป็นการแจกแจงที่น่าสนใจ นิยมใช้มากทางด้านอุตสาหกรรม เช่น การตรวจจับรอยตำหนิของผลิตภัณฑ์ที่ไม่เกิดค่าศูนย์ ดังนั้นในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์ของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก

แบบเลขชี้กำลัง และเปรียบเทียบผลลัพธ์ข้างต้นกับวิธีการจำลองโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล เพื่อวัดประสิทธิภาพของแต่ละวิธี หากนำไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงทำให้สามารถเลือกวิธีการได้อย่างเหมาะสม และทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง และแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสมเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์

วิธีดำเนินการวิจัย

1. การแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์ (Zero Truncated Poisson distribution: ZTP) มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้ [9, 10]

$$P(X = x) = \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{x!(1 - e^{-\alpha})} = \frac{\alpha^x}{x!(e^{-\alpha} - 1)} \tag{1}$$

เมื่อ x คือ จำนวนเต็มบวกใด ๆ ($x = 1, 2, 3, \dots$)

α คือ ค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของการเกิดเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่ง มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนแสดงดังสมการที่ (2) และ (3)

$$E(X) = \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha - 1} \tag{2}$$

$$V(X) = \frac{\alpha + \alpha^2}{1 - e^{-\alpha}} - \frac{\alpha^2}{(1 - e^{-\alpha})^2} \tag{3}$$

2. แผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม CUSUM

2.1 แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average control chart: EWMA) เป็นแผนภูมิควบคุมที่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยของกระบวนการได้อย่างรวดเร็ว [11] ซึ่งถูกคิดค้นโดย Robert [12] โดยมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$EWMA_{X_i} = \lambda X_i + (1 - \lambda)EWMA_{X_{i-1}} ; i \geq 1 \tag{4}$$

- เมื่อ $EWMA_{X_i}$ คือ ค่าของตัวสถิติ EWMA ณ เวลา i เมื่อกำหนด $EWMA_{X_0} = \alpha_0$
- X_i คือ ค่าสังเกตที่มีการแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์ ณ เวลา i
- λ คือ ค่าพารามิเตอร์ของตัวสถิติ EWMA โดย $0 < \lambda \leq 1$

โดยมีขีดจำกัดควบคุมบน ($UCL_{EWMA_{X_i}}$) และขีดจำกัดควบคุมล่าง ($LCL_{EWMA_{X_i}}$) ดังนี้

$$(UCL_{EWMA_{X_i}}, LCL_{EWMA_{X_i}}) = \alpha_0 \pm L \sqrt{\alpha_0 \left[\frac{\lambda}{2-\lambda} \right] \left[1 - (1-\lambda)^{2i} \right]} \tag{5}$$

เมื่อ $i \rightarrow \infty$ ทำให้ $(1-\lambda)^{2i} \rightarrow 0$ จะได้ขีดจำกัดควบคุม ดังนี้

$$(UCL_{EWMA_{X_i}}, LCL_{EWMA_{X_i}}) = \alpha_0 \pm L \sqrt{\left[\frac{\lambda \alpha_0}{2-\lambda} \right]} \tag{6}$$

เมื่อ L คือ สัมประสิทธิ์ความกว้างของขีดจำกัดควบคุม
 α_0 คือ ค่าเฉลี่ยของกระบวนการที่อยู่ภายใต้การควบคุม

ในงานวิจัยนี้ศึกษาแผนภูมิควบคุมทางเดียว ดังนั้น แผนภูมิควบคุม EWMA จะส่งสัญญาณเตือนว่ากระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุมเมื่อค่าออกนอกขีดจำกัดควบคุมด้านบน ($UCL_{EWMA_{X_i}}$)

2.2 แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum control chart: CUSUM)

ในปี ค.ศ. 1954 แผนภูมิควบคุม CUSUM ถูกนำเสนอโดย Page [13] จะทำการหาผลรวมสะสมของค่าสังเกต

ตั้งแต่คาบเวลาเริ่มต้นจนถึง ณ คาบเวลาปัจจุบัน และนำค่าผลรวมนั้นพล็อตในแผนภูมิควบคุม ซึ่งแผนภูมิควบคุมนี้สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงในค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิตที่มีขนาดเล็กได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุมของชีวฮาร์ท ตัวสถิติของแผนภูมิควบคุม CUSUM ณ คาบเวลาที่ i คือค่าผลรวมสะสม C_i สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$C_{X_i} = \max(0, X_i - k + C_{X_{i-1}}) \tag{7}$$

เมื่อ C_{X_i} คือ ค่าผลรวมสะสมเป็นตัวสถิติของ CUSUM ณ คาบเวลาที่ i โดยที่ $i = 1, 2, \dots$

k คือ ค่าอ้างอิงของแผนภูมิควบคุม CUSUM (reference value) โดยกำหนดให้เป็นค่าคงที่และกำหนดให้ตัวสถิติ C_{X_i} มีค่าเริ่มต้น $C_{X_0} = 0$

แผนภูมิควบคุม CUSUM จะส่งสัญญาณเตือนว่ากระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุมเมื่อตัวสถิติ C_i มีค่ามากกว่าขีดจำกัดควบคุมด้านบน $UCL_{CUSUM_{X_i}}$ โดยที่ $UCL_{CUSUM_{X_i}} > 0$

3. ขั้นตอนการหาค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีการจำลองโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล (MC) และวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (MCA) เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์ (ZTP)

- 3.1 กำหนดให้ α คือ พารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์ เท่ากับ 3 และ 10
- 3.2 กำหนดค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (ARL_0) เท่ากับ 370

- 3.3 กำหนดค่าถ่วงน้ำหนัก (λ) ของแผนภูมิควบคุม EWMA เท่ากับ 0.3 และ 0.35
- 3.4 กำหนดค่าอ้างอิง (k) ของแผนภูมิควบคุม CUSUM เท่ากับ 0.5
- 3.5 กำหนดขนาดตัวอย่างย่อย (n) เท่ากับ 1
- 3.6 คำนวณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) โดยวิธี MC และ MCA
- 3.6.1 วิธีการจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo simulation: MC) มีสูตรการคำนวณดังนี้



$$ARL = \frac{\sum_{i=1}^N RL_i}{N} \tag{8}$$

เมื่อ N คือ จำนวนครั้งการทำซ้ำของการทดลอง

RL_i คือ จำนวนตัวอย่างที่ถูกตรวจสอบก่อนจะพบว่ากระบวนการออกนอกขีดจำกัดควบคุมครั้งแรกของการจำลองข้อมูลรอบที่ i

3.6.2 วิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Approach: MCA) มีสูตรการคำนวณดังนี้

$$ARL(N) = \mathbf{P}_N^{(i)T} (\mathbf{I}_N - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}_N \tag{9}$$

เมื่อ $\mathbf{P}_N^{(i)T}$ คือ เวกเตอร์ความน่าจะเป็นเริ่มต้น โดย $\mathbf{P}_N^{(i)T}$ มีค่าเป็น 0 และ 1

- 3.7 เปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ของแผนภูมิควบคุม EWMA ด้วยวิธี MC และ MCA
- 3.8 เปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU's Time) ของแต่ละวิธี

- 3.9 เปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม EWMA และ CUSUM
- 3.10 สรุปผลการวิจัย

4. การประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Approach: MCA)

วิธีนี้เป็นการประยุกต์ใช้เมทริกซ์ผกผันมาใช้ในการประมาณค่า โดยกำหนดค่าสังเกต x_j เมื่อ $j = 1, 2, \dots, N$ เป็นสถานะที่กระบวนการผลิตอยู่ภายใต้การควบคุม และเมื่อ $j = N + 1$ เป็นสถานะกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุมสามารถแทนเมทริกซ์ความน่าจะเป็น P_{ij} [14] ดังนี้

$$P_{ij} = P(X_j = x_j | X_i = x_i) \tag{10}$$

เมื่อ P_{ij} คือความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสถานะจาก i ไปยังสถานะที่ j สามารถเขียนแทนด้วยเมทริกซ์ความน่าจะเป็น \mathbf{P} ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [P_{ij}]_{(N+1) \times (N+1)} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1N} & | & P_{1,N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ P_{N1} & \cdots & P_{NN} & | & P_{N,N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & | & \mathbf{1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1(N+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{(N+1)1} & \cdots & P_{(N+1),(N+1)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I}_N - \mathbf{R})\mathbf{1}_N \\ \mathbf{0}_N^T & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \end{aligned} \tag{11}$$



เมื่อ \mathbf{R} คือ เมทริกซ์ย่อยของ P_{ij} สถานะ $1, 2, \dots, N$ ขนาด $N \times N$

\mathbf{I} คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) ขนาด $N \times N$

$\mathbf{1}$ คือ เวกเตอร์หนึ่ง ขนาด $N \times 1$

$\mathbf{0}$ คือ เวกเตอร์ศูนย์ ขนาด $1 \times N$

1 คือ สเกลาร์ที่มีค่าเท่ากับ 1

กำหนดเมทริกซ์ความน่าจะเป็นในการประมาณค่า ARL เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงสถานะหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่งในลำดับที่ i ดังนี้

$$\mathbf{P}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^i & (\mathbf{I}_N - \mathbf{R}^i)\mathbf{1}_N \\ \mathbf{0}_N^T & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

เมื่อ $(\mathbf{I}_N - \mathbf{R}^i)\mathbf{1}_N$ เป็นเวกเตอร์ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะที่ $i < N+1$ ถึงสถานะที่ $N+1$ ในลำดับที่ i จะได้สมการในการประมาณค่า ARL ด้วยวิธี MCA ดังนี้

$$\begin{aligned} ARL(N) &= \sum_{i=1}^{\infty} i \mathbf{P}_N^{(i)T} (\mathbf{R}^{i-1} - \mathbf{R}^i) \mathbf{1}_N \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i \mathbf{P}_N^{(i)T} ((i+1)\mathbf{R}^i - i\mathbf{R}^i) \mathbf{1}_N \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}_N^{(i)T} \mathbf{R}^i \mathbf{1}_N \\ &= \mathbf{P}_N^{(i)T} (\mathbf{I}_N - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}_N \end{aligned} \quad (13)$$

เมื่อ $\mathbf{P}_N^{(i)T}$ คือ เวกเตอร์ความน่าจะเป็นเริ่มต้น โดย $\mathbf{P}_N^{(i)T}$ มีค่าเป็น 0 และ 1

สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ P_{ij} ของแผนภูมิควบคุม EWMA สามารถเขียนได้ดังนี้

$$P_{ij} = P(LCL_{EWMA_{X_i}} < EWMA_{X_i} < UCL_{EWMA_{X_i}} | EWMA_{X_{i-1}} = CL_{EWMA_{X_i}}) \quad (14)$$

กำหนดให้ในแต่ละช่วงย่อยที่ j มีขีดจำกัดควบคุมบน (h_U) และขีดจำกัดควบคุมล่าง (h_L) ดังนี้

ค่าขีดจำกัดบน ($UCL_{EWMA_{X_i}}$)

$$UCL_{EWMA_{X_i}} = h_L + \frac{j(h_U - h_L)}{N} \quad (15)$$

จุดกึ่งกลางช่วงย่อยที่ i ($CL_{EWMA_{X_i}}$)

$$CL_{EWMA_{X_i}} = h_L + \frac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2N} \quad (16)$$

ค่าขีดจำกัดล่าง ($LCL_{EWMA_{X_i}}$)

$$LCL_{EWMA_{X_i}} = h_L - \frac{(j-1)(h_U - h_L)}{N} \quad (17)$$



และแทนค่า $EWMA_{X_i} = (1-\lambda)EWMA_{X_{i-1}}$ ในสมการ (14) จะได้

$$P_{ij} = P(LCL_{EWMA_{X_i}} < \lambda X_i + (1-\lambda)EWMA_{X_i} < UCL_{EWMA_{X_i}} \mid EWMA_{X_{i-1}} = CL_{EWMA_{X_i}}) \quad (18)$$

และแทนค่า $EWMA_{X_i} = h_L + \frac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2N}$ ลงในสมการ (18) จะได้

$$P_{ij} = P \left(\begin{aligned} & (h_L + \frac{(h_U - h_L)}{2N\lambda} 2(j-1) - (1-\lambda)(2i-1)) < X_i \\ & < (h_L + \frac{(h_U - h_L)}{2N\lambda} (2j - (1-\lambda)(2i-1))) \end{aligned} \right) \quad (19)$$

โดย P_{ij} เป็นความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะ i ไปเป็นสถานะ j เพื่อหาค่าเมทริกซ์ \mathbf{R} และค่า ARL ด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (MCA)

ผลการวิจัย

ตารางที่ 1 ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยวิธี MC และ MCA เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 370, \lambda = 0.30$ และ $\alpha_0 = 3$

ระดับการเปลี่ยนแปลง (δ)	MC L = 2.9098	MCA L = 2.9098
0.01	340.3597±0.9223 (100.06)	340.8600 (5.01)
0.03	285.4736±0.8167 (95.94)	286.1192 (5.04)
0.05	237.3406±0.7072 (92.70)	237.9172 (5.05)
0.07	196.4431±0.6019 (90.39)	195.9300 (5.04)
0.10	148.5187±0.4623 (88.87)	149.2000 (4.98)
0.30	33.6606±0.1013 (85.45)	34.3590 (9.99)
0.50	12.8855±0.0362 (81.55)	13.7500 (15.00)
0.70	6.7715±0.0179 (80.22)	7.6330 (20.04)
0.90	4.2493±0.0104 (82.85)	5.1030 (25.01)

หมายเหตุ ตัวเลขในวงเล็บ () คือ เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU times) มีหน่วยเป็นวินาที



ตารางที่ 2 ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยวิธี MC และ MCA เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 370, \lambda = 0.35$ และ $\alpha_0 = 3$

ระดับการเปลี่ยนแปลง (δ)	MC L = 2.9776	MCA L = 2.9776
0.01	328.6387±0.8965 (110.37)	332.0082 (5.29)
0.03	245.1869±0.7255 (107.27)	245.2204 (5.13)
0.05	176.4240±0.5414 (102.59)	177.4520 (5.20)
0.07	126.2351±0.3900 (99.78)	126.9851 (5.32)
0.10	79.0122±0.2428 (98.01)	79.8807 (5.32)
0.30	10.4832±0.0273 (96.24)	11.4466 (11.08)
0.50	3.9459±0.0080 (99.76)	4.9040 (16.88)
0.70	2.1840±0.0043 (103.15)	3.1096 (21.02)
0.90	1.4941±0.0025 (106.17)	2.3290 (24.30)

หมายเหตุ ตัวเลขในวงเล็บ () คือ เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU times) มีหน่วยเป็นวินาที

ตารางที่ 3 ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA โดยวิธี MC และ MCA เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 370, \lambda = 0.30$ และ $\alpha_0 = 10$

ระดับการเปลี่ยนแปลง (δ)	MC L = 2.978	MCA L = 2.978
0.01	339.8741±0.9227 (100.33)	339.3126 (5.21)
0.03	284.3823±0.8153 (96.69)	284.3885 (5.07)
0.05	237.7173±0.7090 (94.63)	237.8512 (5.12)
0.07	198.9863±0.6091 (92.22)	199.0742 (5.27)
0.10	151.8323±0.4724 (89.55)	152.6392 (5.14)
0.30	35.9874±0.1103 (84.66)	36.6252 (5.12)
0.50	13.6675±0.0394 (81.84)	14.5620 (10.26)
0.70	7.1087±0.0193 (80.62)	7.9370 (15.40)
0.90	4.3775±0.0111 (83.90)	5.2232 (20.54)

หมายเหตุ ตัวเลขในวงเล็บ () คือ เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU times) มีหน่วยเป็นวินาที



ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดค่า $ARL_0 = 370$ เนื่องจากเป็นค่าที่สามารถใช้เปรียบเทียบกับแผนภูมิควบคุมมาตรฐาน (Shewhart control chart) ได้ โดยมีหลักการมาจาก 3 Sigma (3σ) ในส่วนของค่า λ และ α_0 เป็นเพียงการกำหนดค่าพารามิเตอร์ของแผนภูมิควบคุม ซึ่งสามารถกำหนดเป็นค่าคงที่ใด ๆ และ k เป็นค่าอ้างอิงของแผนภูมิควบคุม CUSUM ผู้วิจัยเลือกใช้ $k = 0.5$ เนื่องจากเป็นค่าที่ถูกนิยมใช้ในหลาย ๆ บทความ ในกรณีอื่นสามารถกำหนดเป็นค่าคงที่ใด ๆ

จากตารางที่ 1, 2 และ 3 พบว่าเมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 370, \lambda = 0.30, 0.35$ และ $\alpha_0 = 3, 10$ วิธี MC และวิธี MCA ให้ค่าประมาณความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ใกล้เคียงกัน แต่วิธี MCA ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่าในทุกะดับการเปลี่ยนแปลง (δ) โดยวิธี MCA ใช้เวลาประมาณ 5-25 วินาที ในขณะที่วิธี MC ใช้เวลาประมาณ 90-120 วินาที ต่อหนึ่งกรณีศึกษา ดังนั้นวิธี MCA และวิธี MC ให้ค่าประมาณ ARL ใกล้เคียงกันแต่วิธี MCA ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่าในทุกะดับการเปลี่ยนแปลง

ตารางที่ 4 การเปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม EWMA และ CUSUM เมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 370, \lambda = 0.30, \alpha_0 = 3$ และ $k = 0.5$

ระดับการเปลี่ยนแปลง (δ)	EWMA L = 2.9098	CUSUM (h = 13.032, k = 0.5)
0.01	340.8600 (5.01)	301.4934*±0.8485 (116.55)
0.03	286.1192 (5.04)	189.9084*±0.5865 (104.27)
0.05	237.9172 (5.05)	115.0028*±0.3657 (94.36)
0.07	195.9300 (5.04)	67.9492*±0.2168 (88.02)
0.10	149.2000 (4.98)	31.6085*±0.1045 (84.43)
0.30	34.3590 (9.99)	0.0438*±0.0200 (82.71)
0.50	13.7500 (15.00)	0.0227*±0.0141 (81.55)
0.70	7.6330 (20.04)	0.0141*±0.0107 (80.34)
0.90	5.1030 (25.01)	0.0122*±0.0101 (83.26)

หมายเหตุ * หมายถึง ค่า ARL_1 ที่ต่ำที่สุดในแต่ละระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ย (δ)
ตัวเลขในวงเล็บ () คือ เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU times) มีหน่วยเป็นวินาที

จากตารางที่ 4 พบว่าเมื่อกำหนดค่า $ARL_0 = 370, \lambda = 0.30, \alpha_0 = 10$ และ $k = 0.5$ แผนภูมิควบคุม CUSUM มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิตดีกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA เนื่องจากมี

ค่าประมาณ ARL_1 ต่ำที่สุดในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ย (δ) แต่แผนภูมิควบคุม EWMA ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่าประมาณ 60-110 วินาทีต่อหนึ่งกรณีศึกษา

อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ศึกษาวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ (MCA) ของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง (EWMA) เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์ (ZTP) และเปรียบเทียบผลลัพธ์กับวิธีการจำลองโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล (MC) นอกจากนี้ยังเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลัง และแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (CUSUM) เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปัวซองประเภทตัดปลายที่ศูนย์ สำหรับการสรุปผลในงานวิจัยนี้แบ่งออกเป็น 2 ส่วน ดังนี้

ส่วนที่ 1 การประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยด้วยวิธี MCA ของแผนภูมิ EWMA เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบ ZTP และเปรียบเทียบผลลัพธ์กับวิธีการจำลองข้อมูลโดยใช้วิธี MC โดยกำหนดค่าต่าง ๆ ดังนี้

- กำหนดค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (ARL_0) เท่ากับ 370
- กำหนดค่าถ่วงน้ำหนัก (λ) ของแผนภูมิควบคุม EWMA เท่ากับ 0.3 และ 0.35
- กำหนดค่าพารามิเตอร์ของ ZTP (α_0) เท่ากับ 3 และ 10

จากผลการวิจัยพบว่า วิธี MC และวิธี MCA ให้ค่าประมาณความยาวรันเฉลี่ย (ARL) ใกล้เคียงกัน แต่วิธี MCA ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่าในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ย เวลาในการประมาณผลโดยส่วนใหญ่ของวิธี MCA ประมาณ 5 วินาทีต่อหนึ่งกรณีศึกษา ในขณะที่วิธี MC ใช้เวลาในการประมวลผลมากถึง 100 วินาที ต่อหนึ่งกรณีศึกษา แสดงให้เห็นว่าวิธี MCA ประมวลผลรวดเร็วกว่าวิธี MC ถึง 20 เท่า หากนำมาประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงที่มีจำนวนกรณีศึกษามาก วิธี MCA สามารถประหยัดเวลาในการประมวลผลได้อย่างมาก

ส่วนที่ 2 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิ EWMA และแผนภูมิ CUSUM เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบ ZTP กำหนดค่าอ้างอิง (k) ของแผนภูมิควบคุม CUSUM เท่ากับ 0.5 จากผลการวิจัยพบว่า แผนภูมิควบคุม CUSUM

มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิตดีกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA เนื่องจากมีค่าประมาณ ARL_1 ต่ำที่สุดในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง (δ) ทั้งนี้วิธี MCA สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการแจกแจงอื่น ๆ ได้ เช่น การแจกแจงแบบเรขาคณิตประเภทตัดปลายที่ศูนย์ (Zero Truncated Geometric distribution: ZTG) การแจกแจงทวินามลบประเภทตัดปลายที่ศูนย์ (Zero Truncated Negative Binomial distribution: ZTNB) เป็นต้น หรือนำแผนภูมิควบคุม EWMA เปรียบเทียบประสิทธิภาพกับแผนภูมิควบคุมอื่น ๆ ได้ เช่น แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังสองครั้ง (Double Exponentially Weighted Moving Average control chart: DEWMA) และแผนภูมิควบคุมทูกี้ (Tukey's Control Chart) เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

1. Montgomery DC. Introduction to statistical quality control. 5th ed. New York: John Wiley&Sons; 2005.
2. นพพร งามโสภาสิริกุล. วิธีลูกโซ่มาร์คอฟสำหรับการหาค่าคุณลักษณะของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลสำหรับข้อมูลแบบลิกนอร์มอล. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติประยุกต์, บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ. กรุงเทพฯ; 2555.
3. อูมา รัตนเทพี. การเปรียบเทียบวิธีการคำนวณค่า ARL ด้วยวิธี MC และ MCA สำหรับแผนภูมิควบคุม EWMA เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบปัวซอง. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติประยุกต์, บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ. กรุงเทพฯ; 2552.
4. Lucus JM, Saccuci MS. Exponentially weighted moving average control scheme: properties and enhancements. Technometrics 1990;32(1):12-1.



5. ทวีศักดิ์ จันทร์งาม, เทพรักษ์ จอมแก้ว, กฤษณะ ลานน้ำเที่ยง. ปัจจัยที่มีผลต่อจำนวนวันนอนของผู้ป่วยเบาหวานโรงพยาบาลราชบุรี. วารสารสถิติประยุกต์และเทคโนโลยีสารสนเทศ 2560;2(1):9-20.
6. อภิวัฒน์ พัฒนสุขเกษม. แผนภูมิควบคุมคุณภาพสำหรับการตรวจวัดการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการ. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติ, บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. กรุงเทพฯ; 2548.
7. ภัทรพิชชา แก้วศรีขาว. ความยาววิ่งเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สำหรับจำนวนรอยตำหนิ. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติประยุกต์, บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ. กรุงเทพฯ; 2555.
8. อภิญญา ปริสุทธิพงษ์. การประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม Arcsine EWMA sign แบบไม่ใช้พารามิเตอร์ด้วยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ. วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ 2560;27(1):139-46.
9. Shanker R, Hagos F, Sujatha S. On zero-truncation of Poisson and Poisson-Lindley distribution and their applications. Biom Biostat Int J 2015;2(6):14-1.
10. Abouelmagd THM. A new flexible distribution based on the zero truncated Poisson distribution: mathematical properties and applications to lifetime data. Biostat Biom 2018;8(1):2533-73.
11. Borrer CM, Champ CW, Rigdon SE. Poisson EWMA control charts. J Qual Technol 1998;30(4):361-52.
12. Roberts SW. Control chart tests based on geometric moving average. Technometrics 1959;3(1):250-39.
13. Page ES. Continuous inspection schemes. Biometrika 1954;41(1):100-14.
14. ณัฐพร ทองรอง, เสาวณิต สุขภารังษี, ยุพาภรณ์ อารีพงษ์. การหาค่าความยาววิ่งเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยเอ็กโพเนนเชียลไร้พารามิเตอร์แบบเครื่องหมายโดยวิธีลูกโซ่มาร์คอฟ. วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ 2559; 26(3):487-97.